Kalejdoskop matematyczny
Proste problemy które zainspirowały wielkie odkrycia
Grafy

2019

1 Wstęp — Pojęcie grafu

Zajęcia zaczynamy od przypomnienia pojęcia grafu funkcji, które uczestnicy zajęć znają z lekcji matematyki w szkole. Następnie podajemy nieformalną definicję grafu i reprezentacji geometrycznej grafu.

- Graf to struktura, która składa się ze skończonego zbioru, którego elementy nazywamy wierzchołkami (wierzchołki możemy traktować jak punkty na płaszczyźnie) i połączeń pomiędzy elementami tego pierwszego zbioru czyli krawędzi (krawędzie to krzywe, które łączą punkty będące wierzchołkami)
- W przypadku grafu o n wierzchołkach figurę geometryczną powstałą przez wybór n różnych punktów na płaszczyźnie (zakładamy, że każdy z tych punktów odpowiada jednemu wierzchołkowi grafu) i połączenie odpowiadających sobie punktów (wierzchołków) dowolną krzywą nazywamy reprezentacją geometryczną grafu.
- Każdy graf ma nieskończenie wiele reprezentacji geometrycznych, a reprezentację geometryczną grafu nazywamy właściwą jeżeli tworzące ją krzywe przecinają się tylko w punktach będących wierzchołkami grafu.

Można następnie podać bardziej formalną definicję grafu:

Definicja 1 *Grafem (skończonym, nieskierowanym) G nazywamy parę zbiorów $G = (\mathrm{E}(G), \mathrm{V}(G))$ lub w skrócie $G = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$, gdzie $\mathrm{V}(G) \neq \emptyset$ jest skończonym zbiorem, którego elementy nazywamy wierzchołkami, a zbiór $\mathrm{V}(G)$ nazywamy zbiorem wierzchołków grafu G. Zbiór $\mathrm{E}(G)$ jest skończoną rodziną (niekoniecznie różnych, jeśli zawiera identyczne elementy, to rozróżniamy je nadając im różne etykiety) dwuelementowych podzbiorów $\mathrm{V}(G)$ lub par elementów $\mathrm{V}(G)$, który nazywamy zbiorem krawędzi grafu G, a jego elementy krawędziami. Nadużywając oznaczeń, dopuszczamy jednocześnie w rodzinie $\mathrm{E}(G)$ zbiory dwuelementowe i pary.*

Zastosowania grafów:

- mapy drogowe np. `https://www.openstreetmap.org/#map=15/40.6158/-73.9651` [1]

[1]Źródłem mapy jest www.openstreetmap.org, zasoby udostępniane na licencji Open Database License, CC BY-SA, © OpenStreetMap contributors

- projekty instalacji elektrycznych
- projekty podzespołów elektronicznych, płytek drukowanych itp... Projekt prostej płytki drukowanej można wykonać wykorzystując aplikację TinyCAD dostępną na licencji GNU [2] Przykładowy projekt można znaleźć na przykład na stronie: `https://a.fsdn.com/con/app/proj/pcb/screenshots/95604.jpg/max/max/1`
- projekty/plany sieci teleinformatycznych np. plan `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:200x144px-WorldWideWebAroundWikipedia.png`[3]

Dla ułatwienia będziemy często utożsamiać graf z reprezentacją geometryczną grafu i jeśli jest to możliwe, to będziemy wykorzystywać reprezentacje geometryczne właściwe w $\mathbb{R}^2$.

Podczas zajęć należy zwrócić uwagę na fakt, że taka reprezentacja właściwa może nie istnieć w $\mathbb{R}^2$!

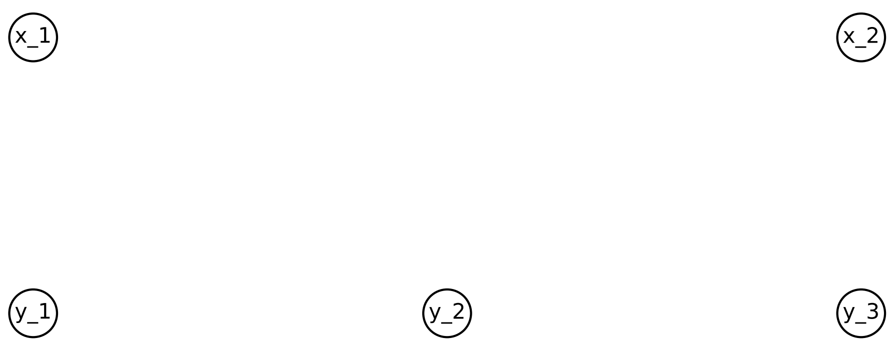
Można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1 *Każdy graf ma reprezentację geometryczną właściwą w* $\mathbb{R}^3$.

Zadania 1 i 2 są poświęcone temu problemowi.

Zadanie 1

W pewnej miejscowości są mieszka dwóch zwaśnionych gospodarzy. Ich domy są oznaczone na rysunku x_1 i x_2. W tej samej miejscowości znajduje się Urząd Pocztowy, Sklep i Urząd Gminy, które są odpowiednio oznaczone na rysunku y_1, y_2, y_3. Czy można wyznaczyć dla każdego z gospodarzy takie drogi na Pocztę, do sklepu i do Urzędu Gminy, aby nie spotkali się ze sobą po drodze oraz takie aby idąc do jednego z tych obiektów nie musieli odwiedzać żadnego z pozostałych?



Uwaga 1 (Realizacja podczas zajęć)

1. Zadanie może być wykonywane samodzielnie lub w grupach 2-4 osobowych
2. Uczestnicy zajęć otrzymują wydruk z lokalizacją obiektów x_i oraz y_j i przy pomocy ołówka próbują wyznaczyć drogi

[2] `https://sourceforge.net/directory/license:lgpl/`

[3] Na licencji CC Creative Commons

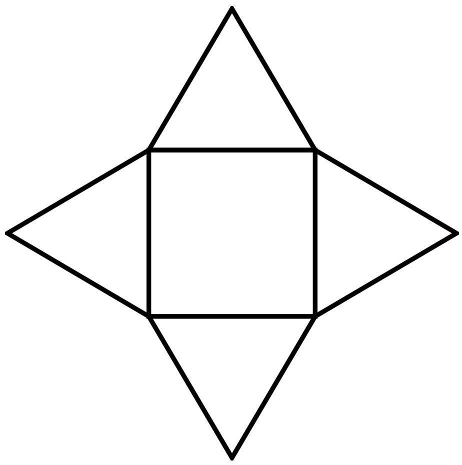
3. Zadanie można wykonać również wyznaczając drogi przy pomocy sznurka lub tasiemki przypinanych do punktów x_i oraz y_j przy pomocy pinezek. W takim przypadku wydruk należy umieścić na kartonie.

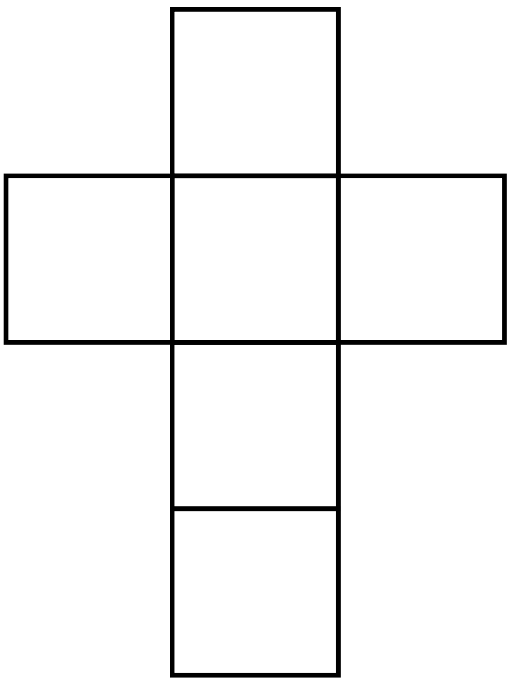
4. W przypadku, gdy pozwalają na to możliwości techniczne, można wykonać makietę umieszczając w punktach x_i domki wydrukowane na drukarce 3D na przykład wg projektu: a w punktach y_j obiekty użyteczności publicznej wydrukowane na drukarce 3D na przykład wg projektów:

   `https://www.thingiverse.com/thing:3480723`[4]

   `https://www.thingiverse.com/thing:3146528`[5]

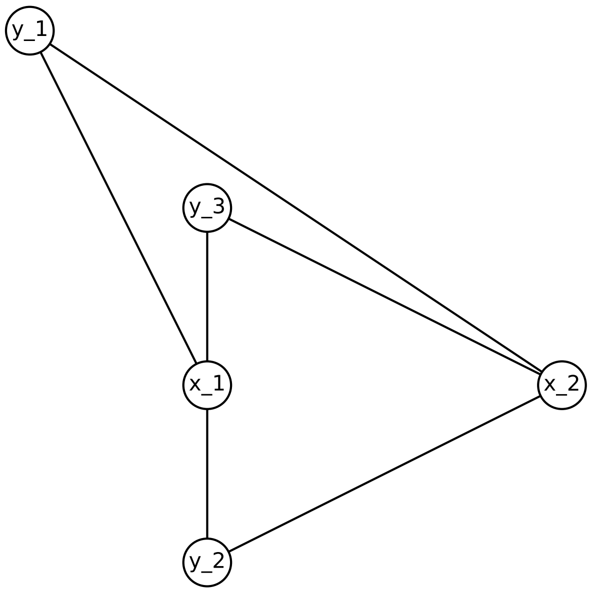
   Wydruki z drukarki 3D można zastąpić modelami sklejonymi z papieru wg poniższego schematu.





[4] Na licencji CC Creative Commons
[5] Na licencji CC Creative Commons

Rozwiązanie (Schemat połączeń)



Zadanie 2

W tej samej gminie pojawia się nowy mieszkaniec, którego dom jest oznaczony na rysunku symbolem x_3. Niestety popada on w konflikt z mieszkańcami domów x_1, x_2 i w związku z tym jest teraz trzech zwaśnionych gospodarzy. Ich domy są oznaczone na rysunku odpowiednio przez x_1, x_2 i x_3. Czy można wyznaczyć dla każdego z trzech gospodarzy takie drogi na Pocztę, do sklepu i do Urzędu Gminy, aby nie spotkali się ze sobą po drodze oraz takie aby idąc do jednego z tych obiektów nie musieli odwiedzać żadnego z pozostałych?

W przypadku zadania 2 postępujemy wg. 1 W tym przypadku zadanie nie ma rozwiązania w $\mathbb{R}^2$, ponieważ graf który przedstawia model dróg to graf pełny dwudzielny $K_{3,3}$, który nie ma reprezentacji geometrycznej właściwej w $\mathbb{R}^2$.

2 Kolorowanie wierzchołków

Kolejna część zajęć jest poświęcona kolorowaniu wierzchołków.

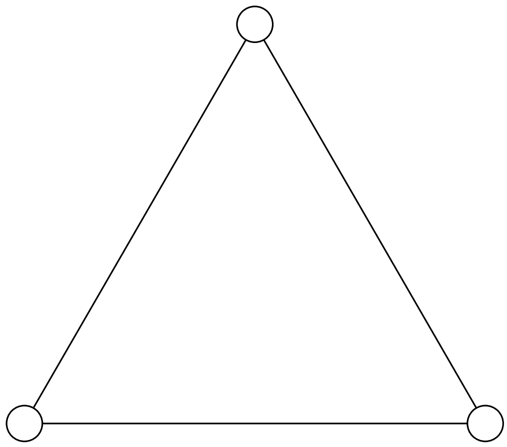
Kolorujemy wierzchołki grafu tak aby:

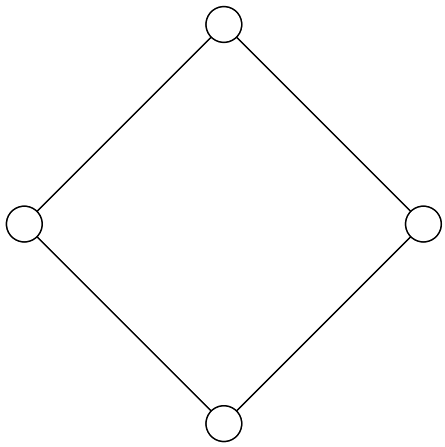
- sąsiadujące wierzchołki miały różne kolory
- wykorzystać najmniejszą możliwą liczbę kolorów

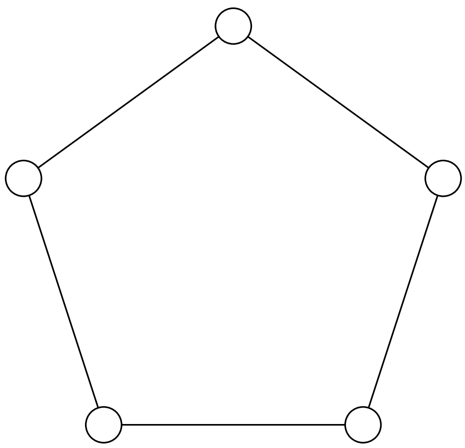
Zadanie 3

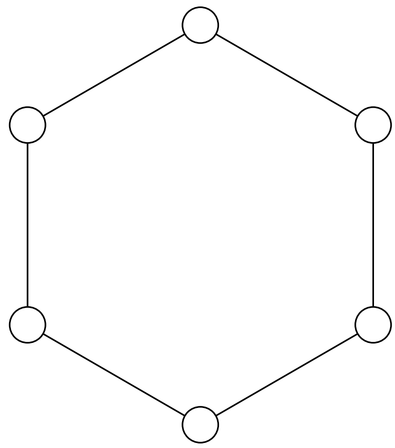
- Dla każdego z grafów przedstawionych na poniższych rysunkach wyznacz minimalną liczbę barw do pokolorowania wierzchołków.

- Jaki jest związek tej liczy z liczbą wierzchołków grafu?

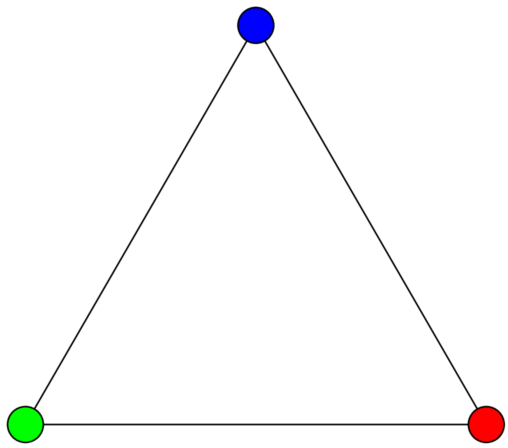


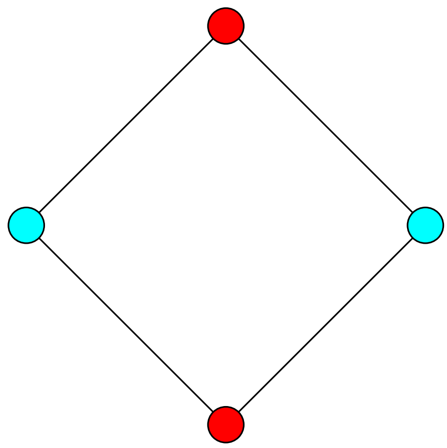


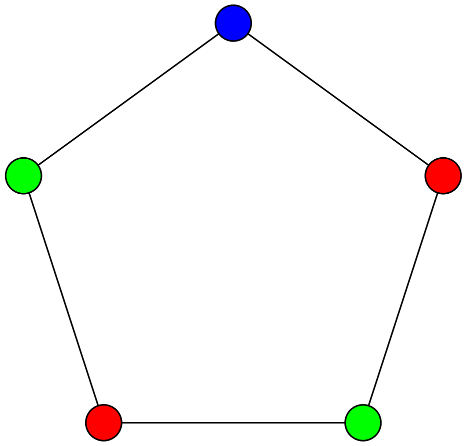


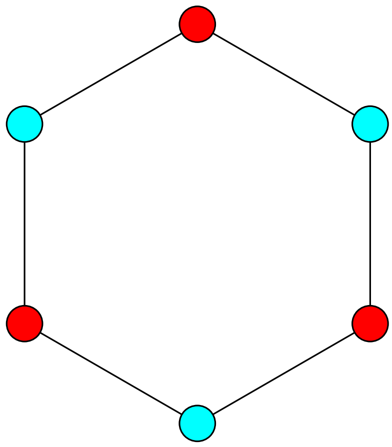


Przykładowe optymalne kolorowania grafów z zadania 3







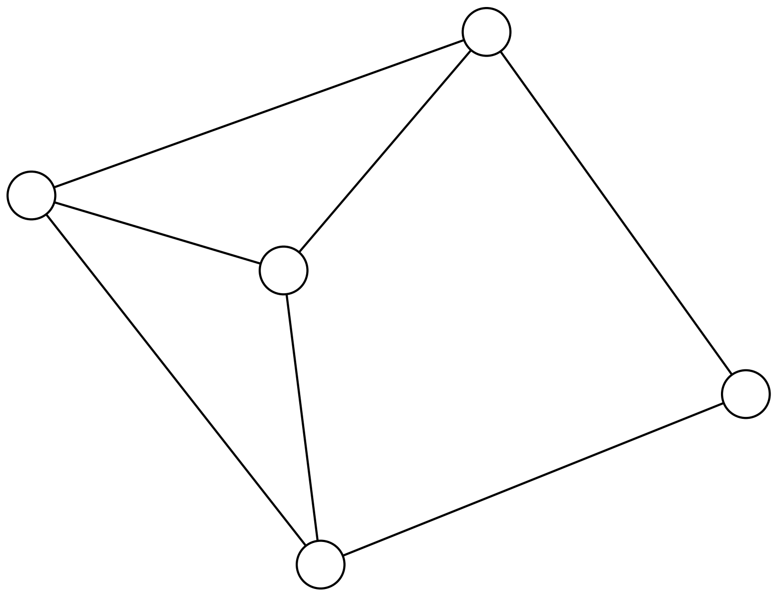


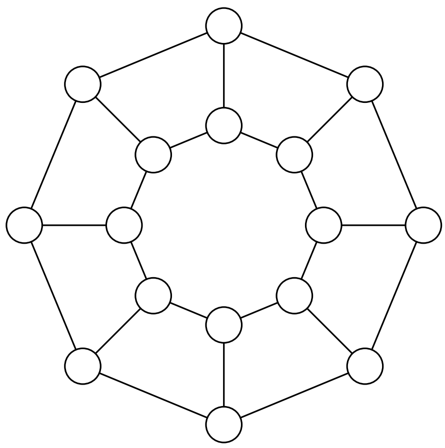
Zadanie 4

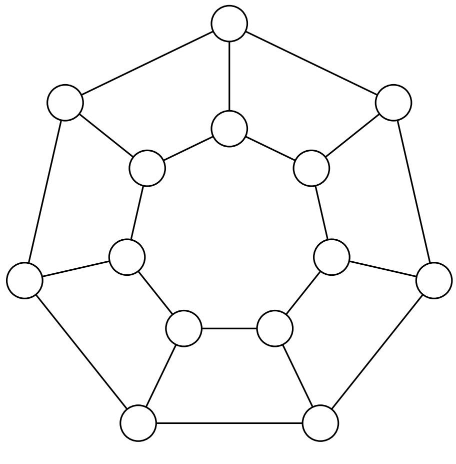
Czy można uogólnić obserwację o minimalnej liczbie kolorów niezbędnych do pokolorowania wierzchołków cyklu długości 3, 4, 5 i 6 do kolorowania cyklu długości n, dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$?

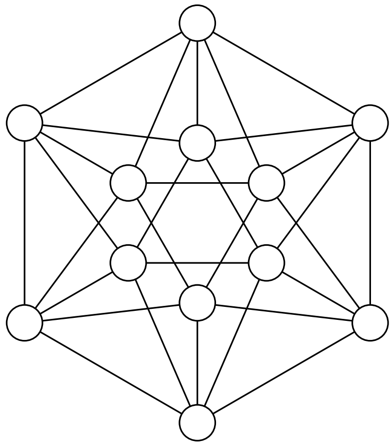
Tak. Do pokolorowania cyklu długości n potrzebujemy trzech kolorów gdy n jest liczbą nieparzystą i dwóch kolorów gdy n jest liczbą parzystą.

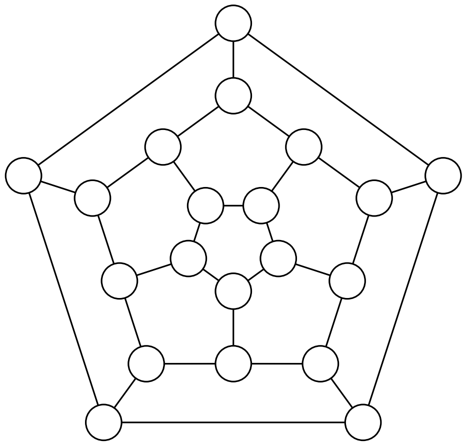
Zadanie 5 *Dla każdego z grafów przedstawionych na poniższych rysunkach wyznacz minimalną liczbę barw do pokolorowania wierzchołków.*



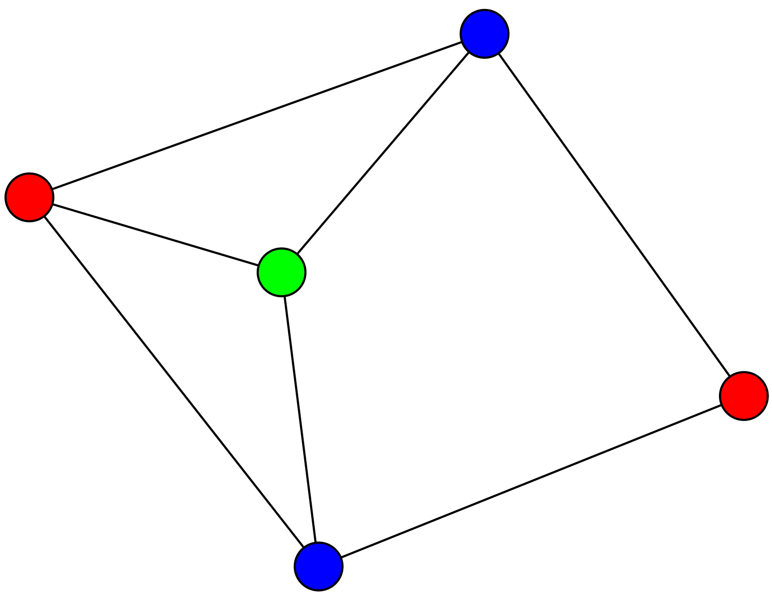


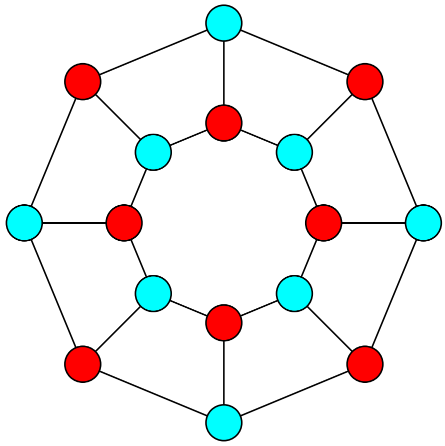


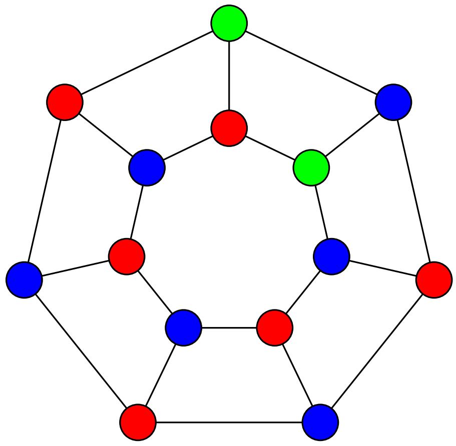


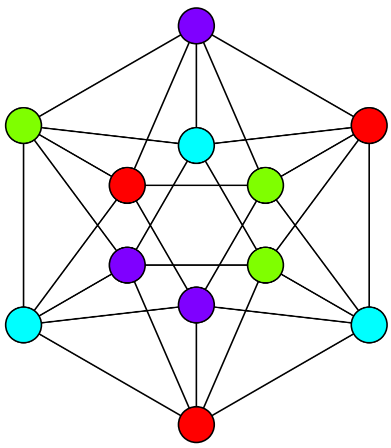


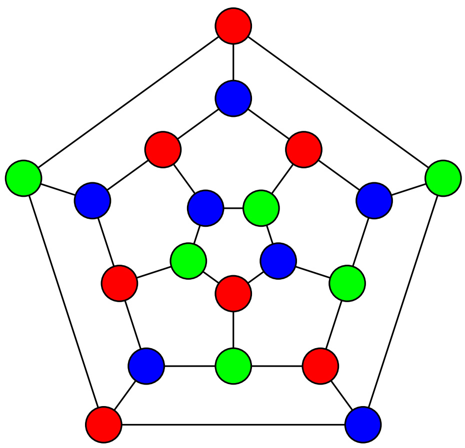
Przykładowe optymalne kolorowania grafów z zadania 5





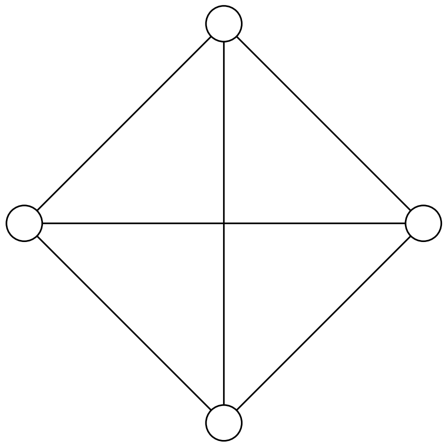


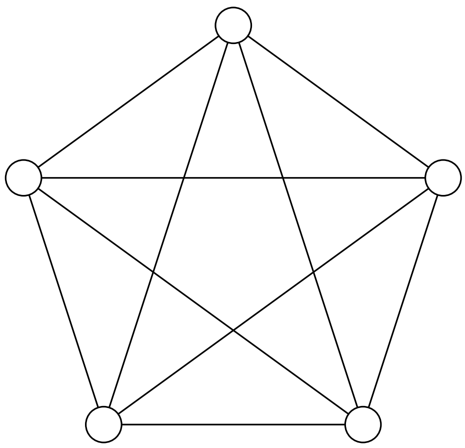


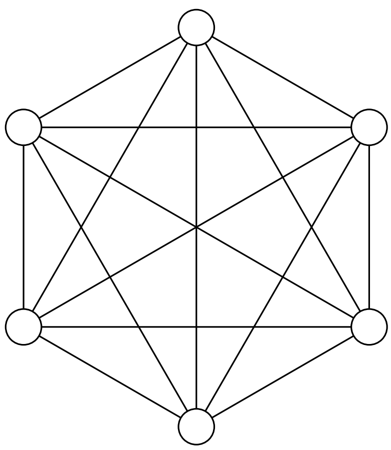


Zadanie 6

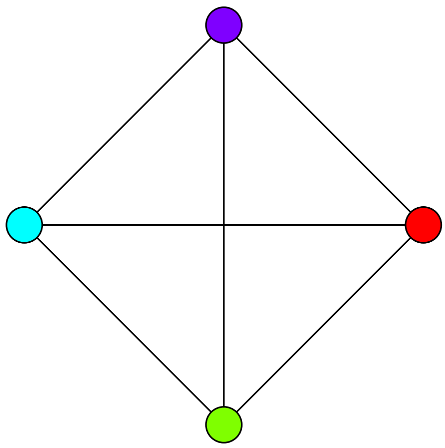
- Dla każdego z grafów przedstawionych na poniższych rysunkach wyznacz minimalną liczbę barw do pokolorowania wierzchołków.
- Na podstawie otrzymanych wyników zaproponuj konstrukcję grafu o n wierzchołkach, dla którego minimalna liczba kolorów niezbędnych do pokolorowania wierzchołków wynosi n.

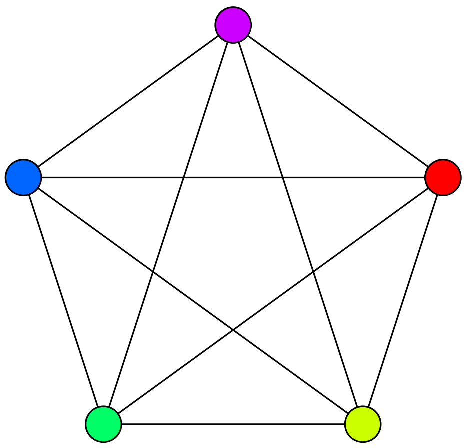


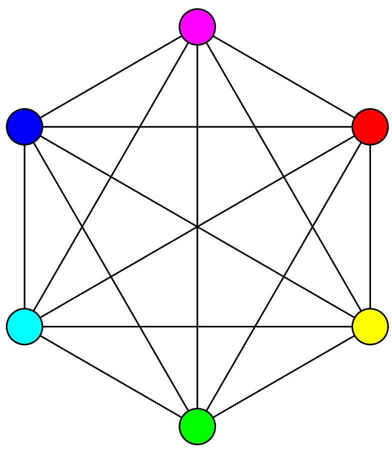




Przykładowe optymalne kolorowania grafów z zadania 6

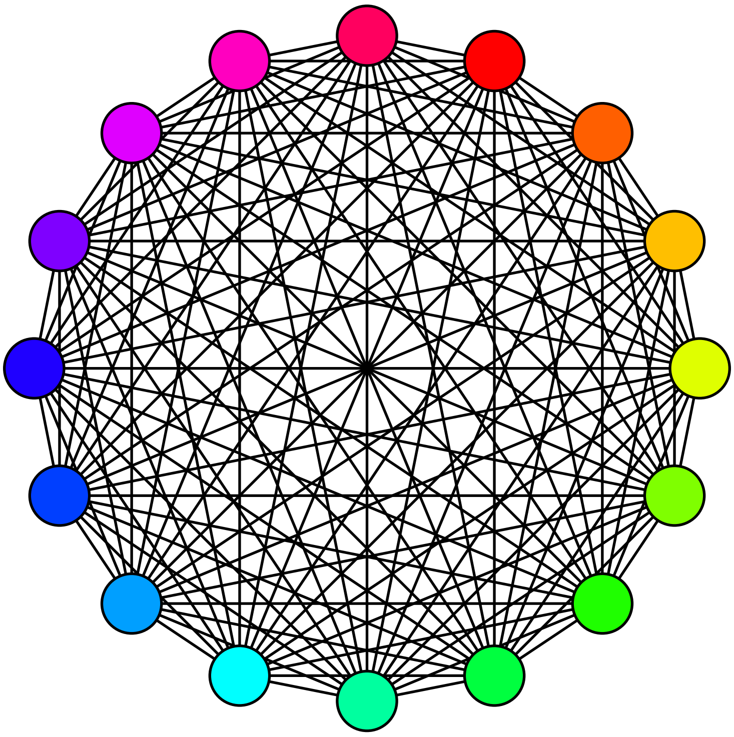


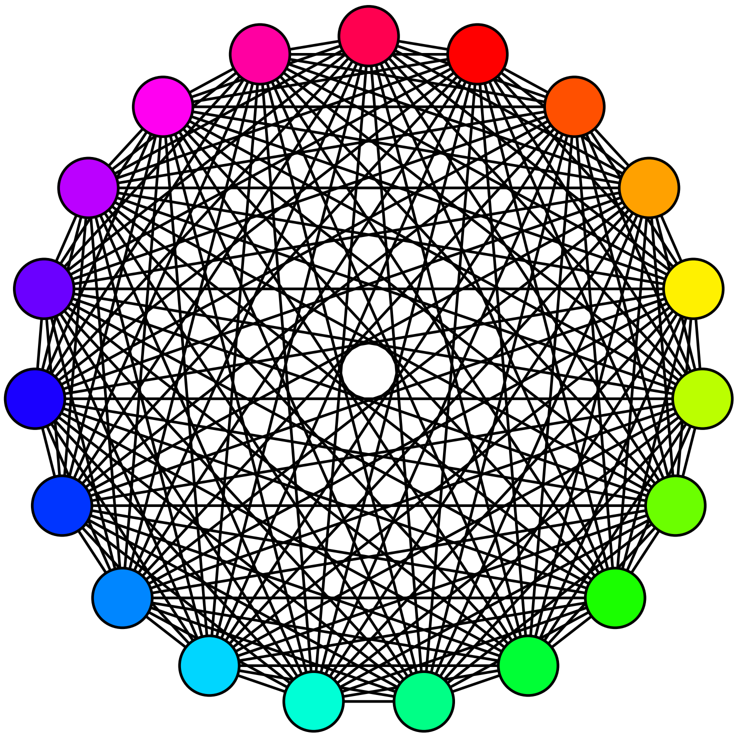




Graf o n wierzchołkach, w którym każdy z wierzchołków jest połączony ze wszystkimi pozostałymi wierzchołkami grafu pojedynczą krawędzią nazywamy grafem pełnym i oznaczamy K_n. Do kolorowania wierzchołkowego grafu pełnego K_n musimy wykorzystać n różnych kolorów.

Przykład kolorowania grafów K_{16} i K_{19}.





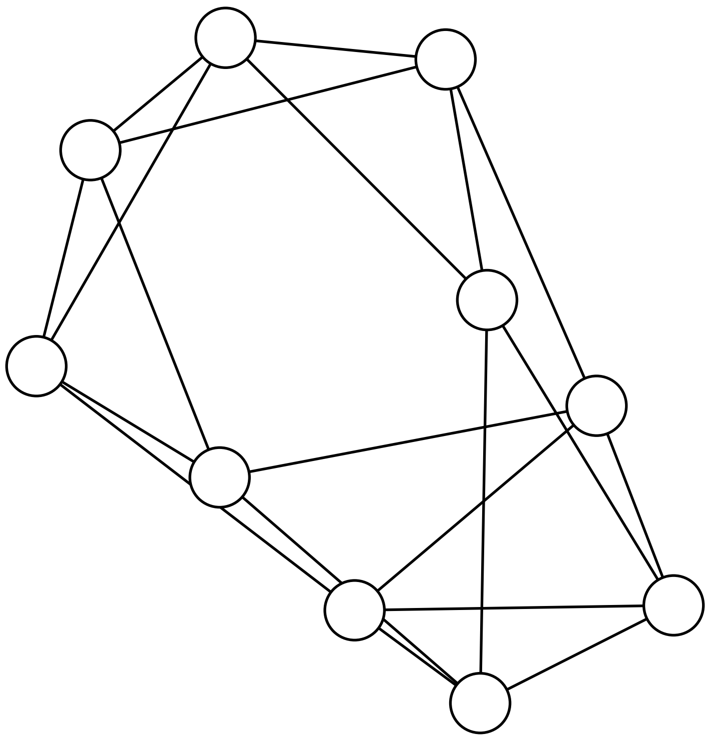
Zadanie 7

Algorytm kolorowania losowego (modyfikacja algorytmu mrówkowego)

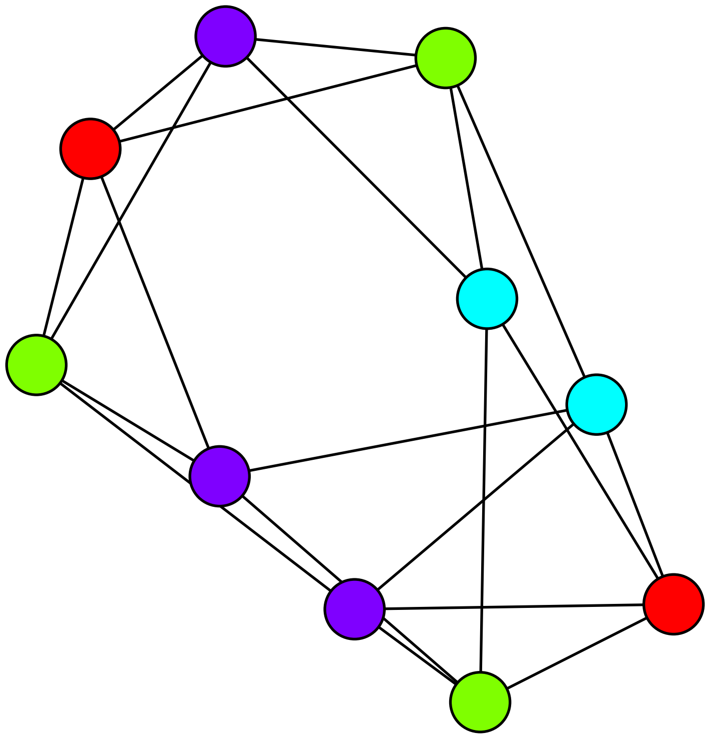
Przypisywanie kolorów wierzchołkom można zastąpić przypisywaniem liczb naturalnych. W przypadku grafów o n wierzchołkach maksymalna liczba kolorów, które będą potrzebne to n.

1. Wybieramy dowolny wierzchołek grafu i przypisujemy mu kolor 1
2. Aby pokolorować kolejne wierzchołki postępujemy według następujących zasad:
   (a) Numerujemy niepokolorowanych sąsiadów ostatnio pokolorowanego wierzchołka zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara zaczynając od sąsiada znajdującego się najniżej
   (b) Aby wybrać kolejny wierzchołek rzucamy kostką do gry (**Musimy dysponować kostką o liczbie ścian równej maksymalnej liczbie sąsiadów wierzchołka w rozważanym grafie** Jeżeli na kostce wypada liczba większa niż liczba sąsiadów rozważanego wierzchołka, to ponawiamy rzut aż do otrzymania liczby mniejszej lub równej liczbie sąsiadów)
   (c) Jeżeli wypadło i, to kolorujemy sąsiada o numerze i pierwszym wolnym kolorem tj. kolorem o najniższym numerze, którym nie jest pokolorowany żaden z wierzchołków połączonych z sąsiadem i
3. Jeżeli ostatnio pokolorowany wierzchołek nie ma niepokolorowanych sąsiadów a w grafie są nadal niepokolorowane wierzchołki, to wybieramy wierzchołek znajdujący się najniżej, kolorujemy go pierwszym wolnym kolorem tj. kolorem o najniższym numerze, którym nie jest pokolorowany żaden z jego sąsiadów i przechodzimy do punku 2b

- Uczestników zajęć dzielimy na kilkuosobowe grupy. Każda z grup koloruje wykorzystując przedstawiony algorytm graf przedstawiony poniżej.
- Porównujemy otrzymane liczby barw i zwracamy uwagę, że mogą one być różne ponieważ otrzymujemy kolorowanie przybliżone, które nie musi być optymalne!



Przykład optymalnego kolorowania ostatniego grafu.



3 Kolorowanie ścian grafów planarnych

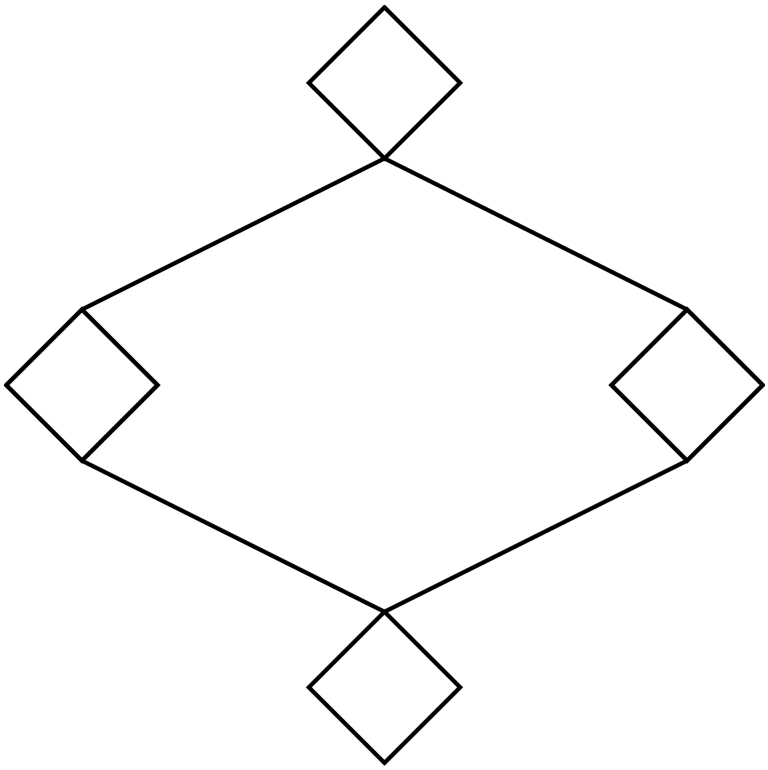
Rozważamy w tej części zajęć tylko grafy planarne tj. grafy, które posiadają reprezentację geometryczną właściwą w $\mathbb{R}^2$

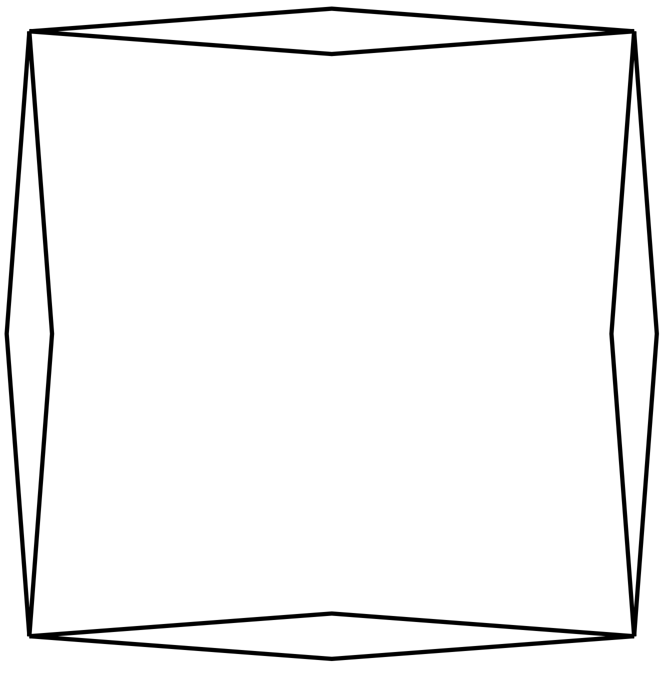
- Ściana grafu planarnego, to zbiór punktów płaszczyzny, które da się połączyć krzywą nieprzecinającą żadnej krawędzi.
- Jedna ściana jest nieograniczona.

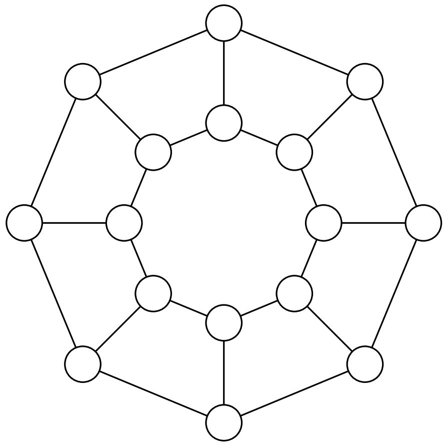
Ściany grafów planarnych kolorujemy tak aby wykorzystać jak najmniejszą liczbę kolorów oraz tak aby sąsiadujące ściany tj. ściany mające co najmniej jedną wspólną krawędź, miały różne barwy. Ściany, które mają jedynie wspólne wierzchołki są niezależne i mogą mieć ten sam kolor.

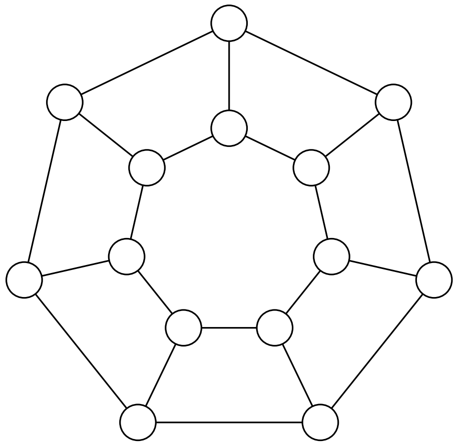
Zadanie 8

- Dla każdego z grafów przedstawionych na poniższych rysunkach wyznacz minimalną liczbę barw do pokolorowania ścian. **Należy pamiętać o ścianie nieograniczonej**
- Jaki jest związek tej liczy z liczbą barw potrzebnych do kolorowania wierzchołków cyklu o n wierzchołkach?









Zadanie to uczestnicy wykonują samodzielnie.

Zadanie 9

W tej części zajęć, dla uproszczenia będziemy utożsamiać graf planarny z mapą administracyjną.

W poprawnie wykonanej mapie administracyjnej sąsiadujące regiony mają różne barwy.

Przykładowa mapa administracyjna Polski w Wikipedii:

`https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/4/4e/Wojewodztwa.svg/525px-Wojewod`
`svg.png`[6]

wykorzystuje 6 kolorów (Dodatkowy kolor ściany nieograniczonej).

W drugiej połowie dwudziestego wieku K. Appel i W. Haken udowodnili, że ściany grafu planarnego można pokolorować wykorzystując co najwyżej cztery kolory.

Wyznacz kolorowanie mapy administracyjnej Polski wykorzystujące cztery kolory.

Do kolorowania można wykorzystać konturową mapę administracyjną Polski dostępną na stronie:
`http://www.anna.manczyk.net/index.php/geografia/materialy-do-pobrania`

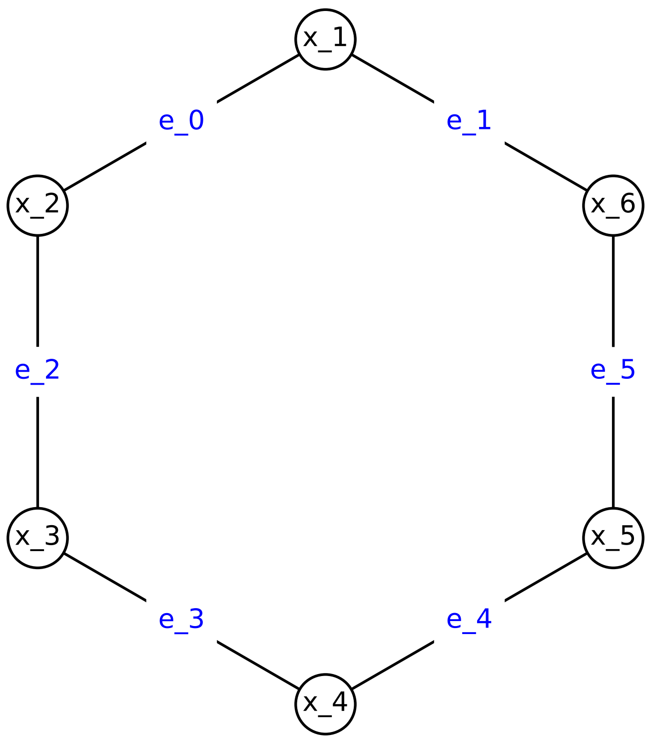
[6]Na licencji CC Creative Commons

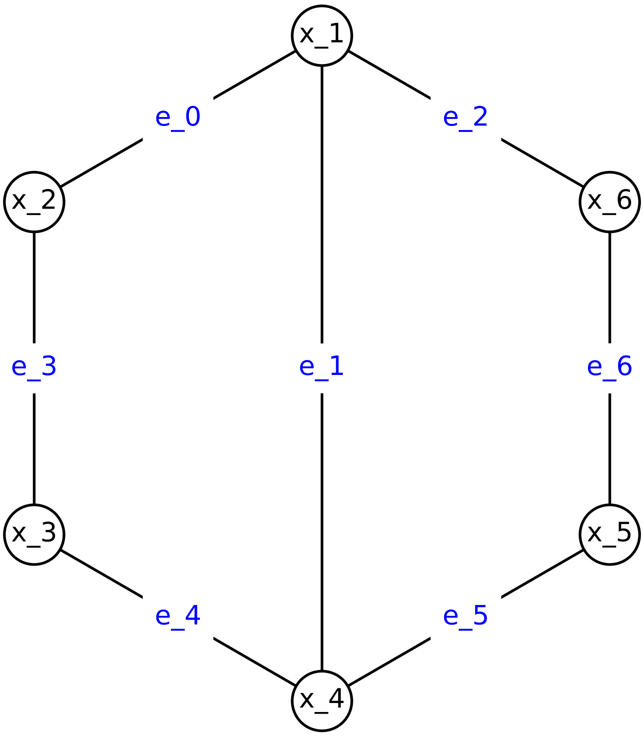
4 Poruszanie się po krawędziach grafu — Droga i cykl Eulera

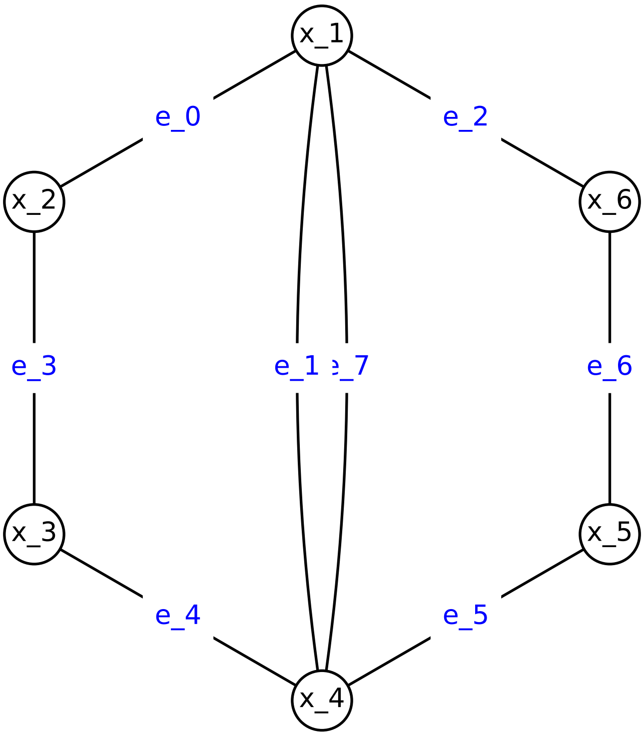
- Drogą Eulera nazywamy drogę, która przechodzi przez każdą krawędź grafu dokładnie jeden raz.
- Cyklem Eulera nazywamy zamkniętą drogę, która przechodzi przez każdą krawędź grafu dokładnie jeden raz.
- Stopień wierzchołka w grafie, to liczba krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem (w przypadku grafów z pętlami, stopień wierzchołka , to liczba krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem plus podwojona liczba pętli w tym wierzchołku)
- Cykl Eulera jest na przykład optymalną trasą na dla listonosza, pługu itp...

Zadanie 10

- Dla każdego z poniższych grafów spróbuj wyznaczyć drogę i cykl Eulera
- Czy jeśli istnieje cykl Eulera, to istnieje również droga Eulera?
- Czy jeśli istnieje droga Eulera, to zawsze istnieje również cykl Eulera?
- Zbadaj stopnie wierzchołków w tych grafach.







Uwaga 2

- Zadanie może być wykonywane samodzielnie lub w grupach 2-4 osobowych
- Uczestnicy zajęć otrzymują wydruk reprezentacji geometrycznych grafów i przy pomocy ołówka próbują wyznaczyć drogi

- Zadanie można wykonać również wyznaczając drogi przy pomocy sznurka lub tasiemki przypinanych do reprezentacji geometrycznych grafów przy pomocy pinezek. W takim przypadku wydruk należy umieścić na kartonie.
- W przypadku, gdy pozwalają na to możliwości techniczne, można wykonać makietę umieszczając w wierzchołku x_1 budynek poczty wydrukowany na drukarce 3D na przykład wg projektu

  domki wydrukowane na drukarce 3D na przykład wg projektu:

  `https://www.thingiverse.com/thing:3146528`[7]

  a w pozostałych wierzchołkach domki wykonane wg projektów:

  `https://www.thingiverse.com/thing:3480723`[8]

Problem mostów królewieckich

Po ostatnim zadaniu opisujemy historie problemu wyznaczania cyklu Eulera oraz wyniki Eulera charakteryzujące grafy zawierające cykl Eulera.

Euler w jednej ze swoich prac S̈olutio problematis ad geometriam situs pertinetis ; formułuje słynne zadanie o mostach królewieckich:

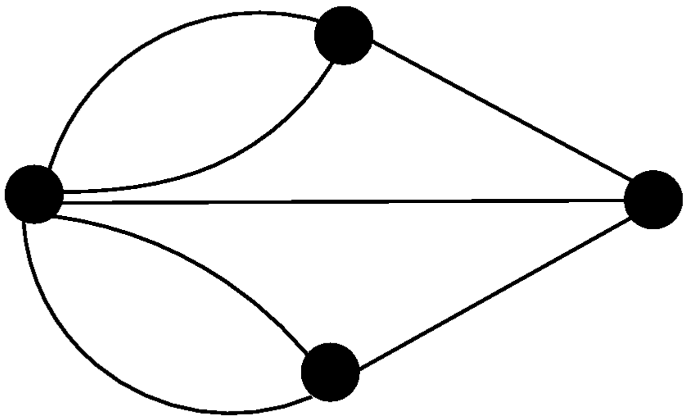
Czy można po siedmiu mostach łączących dzielnice miasta z wyspą na Pregole odbyć spacer w ten sposób, by przejść kolejno przez wszystkie mosty nie przechodząc po żadnym z nich więcej niż jeden raz?

Zadanie można zilustrować kopią oryginalnej mapy Królewca:

`https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Konigsberg_bridges.png`[9]

`https://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:7_bridges.svg`[10]

Rozwiązanie problemu mostów królewieckich jest równoważne wskazaniu drogi zamkniętej przechodzącej dokładnie jeden raz przez każdą krawędź grafu $G_{\text{Królewiec}}$ przedstawionego na rysunku.



Rysunek 1: Mosty królewieckie: Graf $G_{\text{Królewiec}}$

[7] Na licencji CC Creative Commons
[8] Na licencji CC Creative Commons
[9] Na licencji CC Creative Commons
[10] Na licencji CC Creative Commons

Niestety taka droga nie istnieje.
Euler udowodnił następujące twierdzenie:

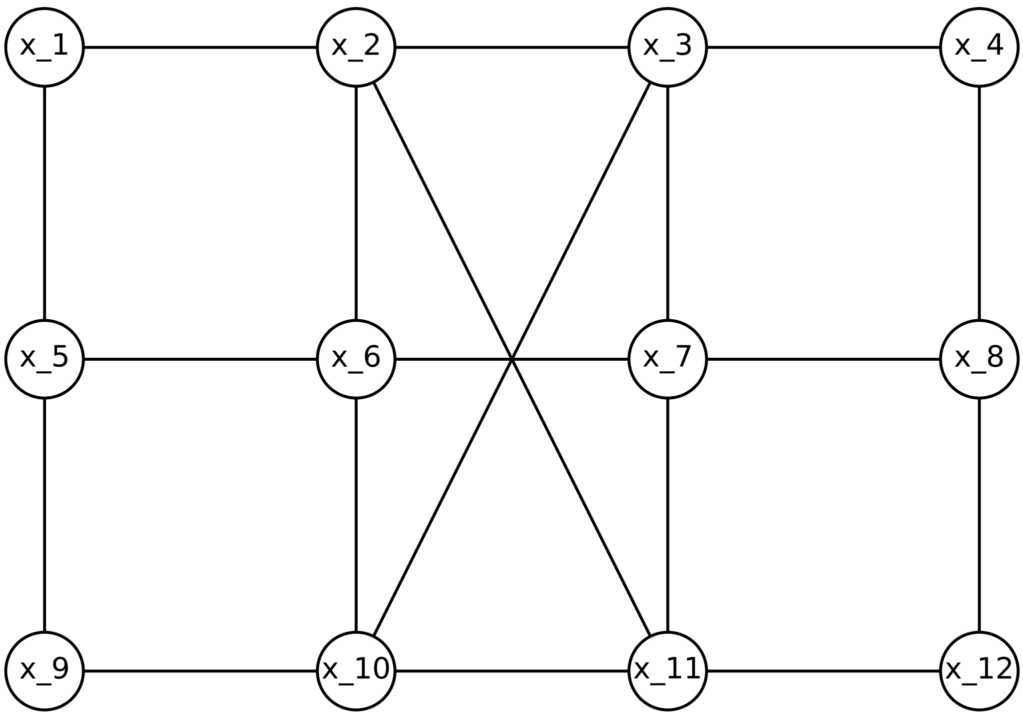
Twierdzenie 2 *Graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka jest parzysty.*

Problem chińskiego listonosza

- Listonosz w swoje pracy wychodzi z urzędu pocztowego, przechodzi przez wszystkie ulice/drogi ze swojego rejonu i wraca do urzędu (do punktu wyjścia) aby rozliczyć się z dostarczonych przesyłek. Optymalna trasa dla listonosza to zamknięta droga, która przechodzi przez każdą ulicę dokładnie jeden raz.
- Problem ten został sformułowany w języku teorii grafów przez chińskiego matematyka Mei Ku Kwana w 1962 roku.
- Rozważmy graf, który jest planem ulic rejonu obsługiwanego przez listonosza. Wierzchołki to po prostu skrzyżowania ulic. Jeśli graf ten posiada cykl Eulera, to istnieje taka droga prosta, która zaczyna i kończy się w tym samym punkcie i wymaga przejścia po każdej ulicy dokładnie raz i jest on optymalną trasą dla listonosza

Zadanie 11

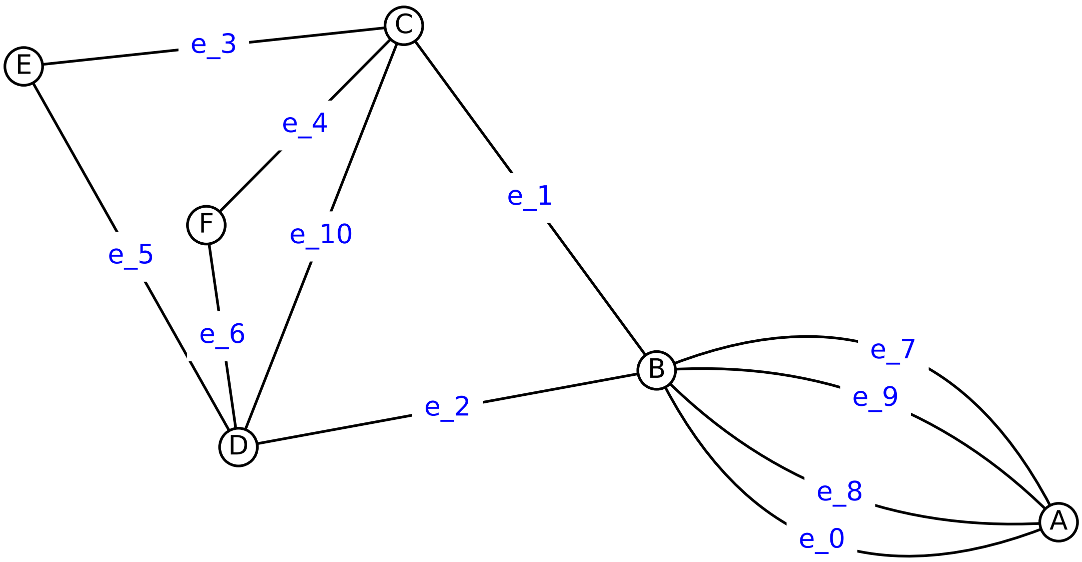
Plan ulic, na których dostarcza korespondencję listonosz jest przedstawiony na rysunku. Listonosz wyrusza z wierzchołka x_1 (Urząd Pocztowy) Wyznacz optymalną trasę dla listonosza.

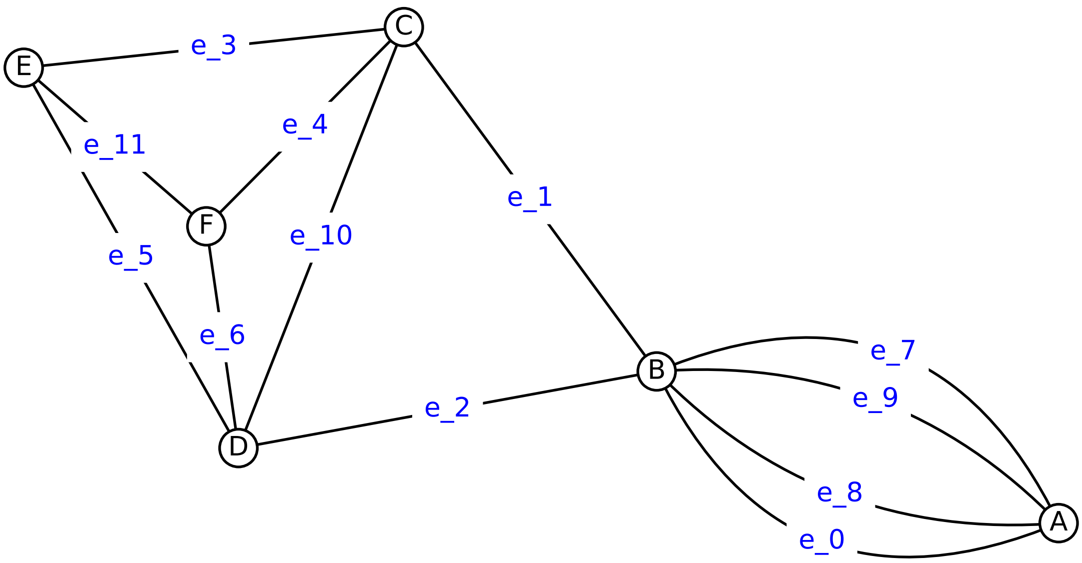


Podczas zajęć do zadania 11 można wykorzystać uwagi 2.

Zadanie 12

W poniższych grafach zbadaj istnienie cyklu Eulera.





Po ostatnim zadaniu zwracamy uwagę uczestników zajęć, na fakt, że cykl Eulera jest cyklem tylko wtedy gdy graf redukuje się do cyklu i kończymy zajęcia zabawą w rysowanie z wykorzystaniem cykli. Wykorzystując pierścienie i/lub płyty CD rysujemy na papierze trochoidy.